**6η Άσκηση**  
  
Μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης:

με την επιφύλαξη του περιορισμού:

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της αντικειμενικής συνάρτησης που υπόκειται στον δεδομένο περιορισμό. Η Λαγκρανζιανή δίνεται από τη σχέση:

Τώρα, ας υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς κάθε μεταβλητή και ας τις θέσουμε στο μηδέν.

**Λοιπόν, ας λύσουμε αυτές τις εξισώσεις:**

Από τις εξισώσεις 1 έως n:

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση n+1:

Αντικαταστούμε τις τιμές που βρήκαμε για το :

Τώρα που βρήκαμε την τιμή του , μπορούμε να βρούμε το :

Έτσι, το κρίσιμο σημείο είναι , και ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι  
.

**Επιβεβαίωση της ιδιότητας του πολλαπλασιαστή:**

Για να επαληθεύσουμε τη βασική ιδιότητα του πολλαπλασιαστή Lagrange σχετικά με τη μεταβολή του μεγίστου της αντικειμενικής συνάρτησης όταν η δεξιά πλευρά του περιορισμού μεταβάλλεται κατά , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange αντιπροσωπεύει τον ρυθμό μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με τον περιορισμό.

**Θεωρήστε τον αρχικό περιορισμό:**

Αν αλλάξουμε τη δεξιά πλευρά του περιορισμού κατά (δηλαδή, , ο νέος περιορισμός είναι:

Εν τέλει, βρήκαμε τη μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης αξιολογώντας την στο κρίσιμο σημείο και τον νέο περιορισμό:

Έτσι, η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ανάλογη του με σταθερό παράγοντα . Αυτό επαληθεύει τη βασική ιδιότητα του πολλαπλασιαστή Lagrange σχετικά με τη μεταβολή της τιμής του μεγίστου της αντικειμενικής συνάρτησης όταν η δεξιά πλευρά του περιορισμού μεταβάλλεται κατά .

**7η Άσκηση**  
  
Στην παρούσα άσκηση, εμβαθύνουμε στη διαδικασία λήψης αποφάσεων ενός παραγωγού στο πλαίσιο μιας ανταγωνιστικής αγοράς. Η συνάρτηση κόστους του παραγωγού, που ορίζεται ως , χρησιμεύει ως σημείο εστίασης, όπου σημαίνει την ποσότητα του παραγόμενου αγαθού. Για να αποκτήσουμε μια ολοκληρωμένη κατανόηση των επιλογών του παραγωγού και της δυναμικής της αγοράς, ξεκινάμε ένα πολύπλευρο ταξίδι. Πρώτον, καταγράφουμε σχολαστικά τις συναρτήσεις του **Οριακού Κόστους (MC)** και του **Μέσου Κόστους (****AC)**, παρέχοντάς μας ανεκτίμητες πληροφορίες για τη δομή του κόστους και την αποτελεσματικότητα της παραγωγής. Προχωρώντας προς τα εμπρός, διερευνούμε τη μεγιστοποίηση του κέρδους, προσδιορίζοντας τη βέλτιστη ποσότητα που πρέπει να παραχθεί όταν αντιμετωπίζουμε μια συγκεκριμένη τιμή αγοράς, όπως 20 δολάρια. Αυτό συνεπάγεται τον υπολογισμό του κέρδους ως τη διαφορά μεταξύ εσόδων και κόστους. Στη συνέχεια, ποσοτικοποιούμε το κέρδος του παραγωγού σε αυτό το σημείο ισορροπίας. Επιπλέον, διερευνούμε την έννοια της χαμηλότερης αποδεκτής τιμής, φωτίζοντας το κατώτατο όριο τιμής κάτω από το οποίο ο παραγωγός θα σταματήσει την παραγωγή. Για να ολοκληρώσουμε την ανάλυσή μας, εξάγουμε τη συνάρτηση προσφοράς, αποκαλύπτοντας τη σχέση μεταξύ της τιμής και της προσφερόμενης ποσότητας, επιτρέποντάς μας να κατανοήσουμε πώς ο παραγωγός προσαρμόζεται στις μεταβαλλόμενες συνθήκες της αγοράς. Αυτή η ολοκληρωμένη διερεύνηση μας εφοδιάζει με βασικές γνώσεις σχετικά με τις στρατηγικές και τις διαδικασίες λήψης αποφάσεων ενός παραγωγού σε μια ανταγωνιστική αγορά.  
  
**α)** Για να παρουσιάσουμε τα διαγράμματα των συναρτήσεων του Οριακού Κόστους (MC) και του Μέσου Κόστους (AC) ως συναρτήσεις της ποσότητας , πρέπει να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις αυτές. Η συνάρτηση κόστους δίνεται ως .

Το **Οριακό Κόστος (M****C)** είναι η παράγωγος της συνάρτησης κόστους ως προς την ποσότητα

Το **Μέσο Κόστος (AC)** είναι το συνολικό κόστος διαιρούμενο με την παραγόμενη ποσότητα:

Τώρα, ας δημιουργήσουμε τo διάγραμμα για τα MC και AC ως συναρτήσεις του

**β)** Για να βρούμε την ποσότητα που θέλει να παράγει ο παραγωγός αν η τιμή του αγαθού είναι $20, πρέπει να εξετάσουμε την ποσότητα μεγιστοποίησης του κέρδους. Το κέρδος δίνεται από τη σχέση:

Όπου:

**- είναι το κέρδος.**

**- είναι το έσοδο, το οποίο είναι η τιμή επί την ποσότητα.**

**- είναι η συνάρτηση κόστους: .**

Δεδομένου ότι η τιμή είναι $20, έχουμε:

Τώρα, μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση κέρδους ως συνάρτηση του :

Για να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος, πρέπει να βρούμε την παράγωγο της ως προς την και να τη θέσουμε ίση με μηδέν:

Λύνοντας για την :

Έτσι, ο παραγωγός θα ήθελε να παράγει ποσότητα 10 αν η τιμή του αγαθού ήταν 20 δολάρια.

**γ)** Για να βρείτε το κέρδος σε αυτή την τιμή, αντικαταστήστε την στη συνάρτηση κέρδους :

Το κέρδος σε τιμή $20 είναι $40.

**δ)** Η χαμηλότερη αποδεκτή τιμή για τον παραγωγό θα ήταν η τιμή στην οποία το κέρδος είναι μηδέν. Για να βρείτε αυτή την τιμή, θέστε και λύστε για :

Αυτή είναι μια τετραγωνική εξίσωση. Μπορούμε να την λύσουμε για να βρούμε την αποδεκτή τιμή. Στην περίπτωση αυτή, η αποδεκτή τιμή είναι εκείνη που οδηγεί σε μη αρνητική ποσότητα .

**ε)** Για να εξάγουμε τη συνάρτηση προσφοράς, πρέπει να βρούμε την παραγόμενη ποσότητα σε συνάρτηση με την τιμή . Η συνάρτηση προσφοράς συνήθως προκύπτει εξισώνοντας την τιμή με το οριακό κόστος , επειδή ένας παραγωγός θα προσφέρει περισσότερα αγαθά όσο η τιμή υπερβαίνει το οριακό κόστος.

Από το μέρος α, γνωρίζουμε ότι το οριακό κόστος είναι . Επομένως, η συνάρτηση προσφοράς είναι:

Αντικαταστούμε την έκφραση για :

Λύνουμε για :

Αυτή είναι η συνάρτηση προσφοράς, η οποία εκφράζει την παραγόμενη ποσότητα σε συνάρτηση με την τιμή .

Ακολουθεί το σχετικό διάγραμμα προσφοράς:

Σε αυτό το διάγραμμα, η καμπύλη προσφοράς είναι μια γραμμική συνάρτηση με κλίση 2, που δείχνει ότι η προσφερόμενη ποσότητα αυξάνεται με την τιμή. Ο παραγωγός θα προσφέρει το μισό της τιμής, δηλαδή .